Graphes : quelques résultats de TD

Emmanuel Filiot

janvier - mai 2003

1 Généralités

1.1 Chaînes, propriété de Helly

Propriétés

- Dans un graphe connexe, deux chaînes élémentaires de longueur maximum ont un sommet en commun.
- Si G est un arbre, toutes les chaînes de longueur maximum ont un sommet en commun.

Réordonnancement des arêtes Soit $G = (X, E)$ un graphe non orienté. Supposons qu'il existe deux chaînes arêtes-disjointes entre deux sommets x et y. Alors il existe deux chaînes arêtes-disjointes μ_1 et μ_2 qui vérifient la condition suivante :
Si on note $a_1, a_2, ..., a_p$ (resp. $b_1, b_2, ..., b_p$) l'ordre sur μ_1 (resp. sur μ_2) des sommets de $\mu_1 \cap \mu_2$ en allant de x vers y, alors $a_i = b_i, \forall 1 \leq i \leq p$.

Propriété de Helly Soit $\{T_i = (X_i, E_i), 1 \leq i \leq k\}$ une famille de sous-arbres de l'arbre $T = (X, E)$. Alors :

$$(\forall i, j \;\; T_i \cap T_j \neq \emptyset) \implies \bigcap_{i=1}^{k} T_i \neq \emptyset$$

Propriété Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| = 2n$ et $|E| = m$. Si G ne contient pas de cycle de longueur 3 alors $m \leq n^2$.

1.2 Graphes eulériens

1.2.1 Graphes eulériens

Définition Un graphe connexe est dit *eulérien* s'il existe un cycle passant une fois et une seule par toutes les arêtes du graphe, un tel cycle est dit eulérien.

Caractérisation Un graphe connexe $G = (X, E)$ est eulérien si et seulement si $\forall x \in X \;\; d(x)$ est pair.

1.2.2 Graphes semi-eulériens

Définition Un graphe connexe est semi-eulérien s'il existe une chaîne non fermée passant une fois et une seule par chaque arête.

Caractérisation Un graphe connexe est semi-eulérien si et seulement si il possède exactement deux sommets de degré impair.

1.2.3 Graphes arbitrairement eulériens

Définition Un graphe connexe est arbitrairement eulérien en x si tout cheminement maximal d'origine est un cycle eulérien.

Caractérisation Un graphe G est arbitrairement eulérien en x si et seulement si G est eulérien et tout cycle de G passe par x.

Propriété Si F est une forêt où chaque arbre a au moins deux sommets.
Si x est un sommet n'appartenant pas à F, alors en joignant par une arête x à tous les sommets de degré impair de F on obtient un graphe arbitrairement eulérien en x.

2 Graphes orientés sans circuits

Propriété Un graphe orienté est sans circuits si et seulement si toutes ses composantes fortement connexes sont réduites à un sommet.

On construit le graphe réduit d'un graphe orienté en considérant ses composantes fortement connexes.

Propriété Le graphe réduit est sans circuits.

3 Couplages parfaits

Propriété Soit $G = (X, E)$ un graphe à $2n$ sommets tels que $\forall x \in X\ d(x) \geq n$. G admet un couplage parfait.

Théorème de Petersen Tout graphe 2-connexe et 3-régulier admet un couplage parfait.

Lemme Un arbre T admet un couplage parfait si et seulement si $\forall x \in X$, $i(T-x) = 1$, où $i(T-x)$ est le nombre de composantes connexes d'ordre impair de $T-x$.

4 bipartis

caractérisation Il y a équivalence entre les assertions suivantes :
- G est biparti ;
- G ne contient pas de cycle de longueur impaire ;
- G ne contient pas de cycle élémentaire de longueur impaire.

Théorème de Hall Soit $G = (X, Y, E)$ un graphe biparti. G admet un couplage parfait saturant X si et seulement si $\forall A \subseteq X\ |A| \leq |\Gamma(A)|$.

Corollaire Un graphe biparti k-régulier admet un couplage parfait.

5 Connexité

5.1 2-connexité

Propriétés

- G est 2-connexe si et seulement si deux sommets quelconques appartiennent à un même cycle élémentaire, si et seulement si deux arêtes quelconques appartiennent à un même cycle élémentaire et G n'a pas de sommet isolé.
- Les composantes 2-connexes partitionnent les arêtes du graphe.

5.2 cas général

Soit G un graphe h-connexe avec $h \geq 2$. Tout ensemble de h sommets distincts appartient à un même cycle élémentaire.

6 Coloration de graphes

Formule d'Euler pour les graphes planaires Soit un graphe planaire à n sommets, e arêtes, f faces et k composantes connexes. Alors

$$n + f = e + k + 1$$

Coloration et orientation Soit D une orientation d'un graphe non orienté G pour laquelle la longueur maximale d'un chemin vaut $l(D)$. Alors

$$\chi(G) \leq l(D) + 1$$